FIZYKA INŻYNIERSKA

wykład

Pole elektromagnetyczne cz.1

Prowadzący:

dr inż. Sławomir Bielecki

adiunkt

Zakład Racjonalnego Użytkowania Energii
ITC PW

pok. 405A TC

slawomir.bielecki@itc.pw.edu.pl

http://itc.pw.edu.pl/Pracownicy/Naukowo-dydaktyczni/Bielecki-Slawomir

Zakres wykładu

- Energia pola elektrycznego i siły mechaniczne w polu elektrycznym
- Energia pola magnetycznego i siły mechaniczne w polu magnetycznym
- Indukcja e-m, SEM transformacji i rotacji, prądy wirowe
- Równania pola e-m Maxwella, równania falowe
- Indukcja magnetomotoryczna, prąd przesunięcia
- Pole harmoniczne – zależność przewodzenia od częstotliwości
- Strumień mocy – wektor Poyntinga
- Rola przewodników i dielektryków przy przesyle energii elektrycznej
- Siły mechaniczne w polu e-m (informacja)

Literatura

- **I.W.Sawieliew**: Wykłady z fizyki, tom 2. PWN 1998 (rozdz.: I – IV, VI-IX)
- **D.Halliday, R.Resnick**: Fizyka 2. PWN 1998 (rozdz.40, 41)
- **L.D.Landau, J.M.Lifszyc**: Teoria pola. PWN 2009 (rozdz. IV)

Pole – pojęcie fizyczne

Fakty:

- Każde ciało może wytwarzać wokół siebie określone oddziaływania, które mogą wpływać na inne ciała.
- Oddziaływania te rozchodzą się w przestrzeni z ograniczoną prędkością (teoria względności).
- Oddziaływania te nakładają się na siebie.
- Oddziaływania mogą mieć różny charakter (np. grawitacyjne, elektryczne, magnetyczne, ...) i wiążą się z przekazywaniem sił i/lub energii.

***Pole* pełni funkcję przekaźnika wzajemnego oddziaływania między ciałami.**

Fizyka klasyczna odróżnia pojęcia opisujące postacie materii:

- **substancja -** gdy materia jest skupiona w ograniczonym obszarze przestrzeni („zlokalizowana")
- **pole –** gdy jest rozproszona w przestrzeni („zdelokalizowana")

Można mówić o jednostce objętości substancji i jednostce objętości pola

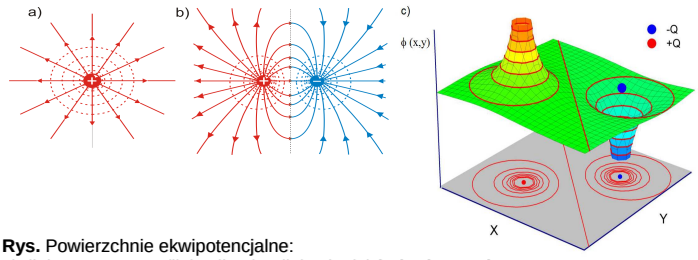
Fizyka współczesna nie stawia wyraźnej granicy między polem a substancją.

Pole i substancja mogą przekształcać się wzajemnie !

Pole elektryczne – właściwości energetyczne

Energia pola elektrycznego

Potencjał elektryczny ϕ [V] **to energia potencjalna pola elektrycznego odniesiona do jednostkowego ładunku.**



Rys. Powierzchnie ekwipotencjalne:
a) linie przerywane (linie sił pola - linie ciągłe) **ładunku punktowego**,
b) jak w (a) - **dipola elektrycznego**;
(*linie ekwipotencjalne oznaczają przecięcia powierzchni ekwipotencjalnych z płaszczyzną rysunku*)
c) rozkład przestrzenny dla **dipola elektrycznego**.

Pole elektryczne – właściwości energetyczne

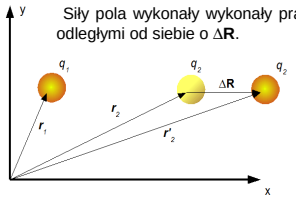
Energia pola elektrycznego

Stan energetyczny pola elektrycznego można scharakteryzować dwoma sposobami:

- Określając *energię wzajemnego oddziaływania* między ładunkami (nie dla każdego punktu w przestrzeni).
- Określając *gęstość objętościową energii* (dla każdego punktu przestrzeni).

Energia wzajemnego oddziaływania między ładunkami

Inercjalny układ współrzędnych, 2 ładunki: q_1 i q_2, ładunek q_2 przesunął się o $\Delta\mathbf{R}$. Ruch ładunku spowodował, że kosztem energii zgromadzonej w polu wykonana została praca, równa ubytkowi energii wzajemnego oddziaływania ładunków.



Siły pola wykonały wykonały pracę w wyniku zmiany potencjału między punktami odległymi od siebie o $\Delta\mathbf{R}$.

Energia oddziaływania ładunku 1 na 2:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left|\frac{q_1 q_2}{\mathbf{r_1} - \mathbf{r'_2}}\right|$$

Ogólnie (energia oddziaływania *N* ładunków na ładunek *i*):

$$W_i = \frac{|q_i|}{4\pi\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{q_j}{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}\right|$$

Energia oddziaływania *N* ładunków na ładunek *i*:

$$W_i = \frac{|q_i|}{4\pi\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{q_j}{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}\right|$$

Energia układu ładunków:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{|q_i|}{4\pi\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{q_j}{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}\right|$$

Gęstość mocy i energii pola elektrycznego

Gęstość objętościowa energii pola elektrycznego [J/m^3=Pa]:

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$$

Praca ładunku elementarnego Δq na drodze $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta W = \Delta q\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{r}$$

Moc pola wykonującego tę pracę:

$$\Delta P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{r}$$

Ponieważ: $\frac{\Delta q}{\Delta t} = i = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{S}$ $\quad \Delta\mathbf{S}\cdot\Delta\mathbf{r} = \Delta V$

Gęstość objętościowa mocy: $p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Gęstość objętościowa mocy pola elektrycznego **określa tę część zmiany energii pola w funkcji czasu, jaka przekształca się w energię cieplną, ponieważ jest związana z nadaniem energii kinetycznej dla swobodnych ładunków elektrycznych. Wzrost energii kinetycznej ładunków powoduje wzrost temperatury ośrodka, czyli przemianę energii elektrycznej w cieplną.**

Siły mechaniczne w polu elektrycznym

Metody obliczania sił mechanicznych opierają się na:

- prawie Coulomba
- wykorzystaniu oddziaływania pola elektrycznego na ładunki
- obliczaniu gradientu energii
- obliczaniu naprężeń powierzchniowych
- obliczaniu wektora gęstości objętościowej sił

Metody oparte na prawie Coulomba

Stosowane praktycznie tam, gdzie odległości między naładowanymi obiektami są znacznie większe od tych obiektów.

Metody oparte na oddziaływaniu pola na ładunki

- Zależność między siła mechaniczną a natężeniem pola: ***F***=*q**E*** (*q*- ładunek punktowy)
- Gdy rozmiary geometryczne obiektu są znaczne – nie można traktować go jako ładunek punktowy !
- Na naładowany obiekt przewodzący działają ponadto siły wywierane przez pole na ładunki zaindukowane na jego powierzchni w wyniku elektryzacji
- Na dielektryki pole zewnętrzne wywiera siły mechaniczne na dipole przypowierzchniowe

Metody oparte na gradientach energii

- Ruch obiektu w polu elektrycznym wiąże się ze zmianą energii pola ΔW i wykonaniem przez siły pola pracy ΔL (kosztem zmiany energii pola elektrycznego): $\Delta L = -\Delta W$
- Praca to cyrkulacja siły ***F*** działającej na obiekt wzdłuż drogi $\Delta \mathbf{r}$: $\Delta L = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$
- Przechodząc do nieskończenie małych zmian przesunięcia i energii możemy zapisać:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, W$$

Metody oparte na naprężeniach powierzchniowych

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Gęstość objętościowa energii pola elektrycznego [Pa] **jest miarą** (oprócz zdolności pola do wykonania pracy) **potencjalnie możliwych do ujawnienia się się sił mechanicznych, przez wywieranie ciśnienia mechanicznego, równego** w_e**.**

- W środowisku jednorodnym, w którym wymuszono pole elektryczne nie można stwierdzić doświadczalnie istnienia naprężeń mechanicznych.
- Naprężenia się ujawniają po wprowadzeniu obiektu o innych właściwościach elektrycznych (przestrzeń staje się niejednorodna materiałowo)

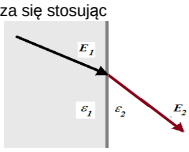
Zatem, na każdą granicę nieciągłości materiałowej jest wywierana siła mechaniczna

Na styku dielektryków działa naprężenie (odpowiednik ciśnienia), prostopadłe do powierzchni granicznej i skierowane od środowiska o większej przenikalności elektrycznej do mniejszej. Kierunek nie zależy od kierunku pola

Naprężenia, równe w danym punkcie przestrzeni liczbowo w_e,wyznacza się stosując rachunek tensorowy (tensor naprężeń powierzchniowych).

Naprężenie działające na granicy nieciągłości:

$$T = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2}\left(\varepsilon_1 E_{n1}^2 + \varepsilon_2 E_{t1}^2\right)$$



Pole magnetyczne – właściwości energetyczne

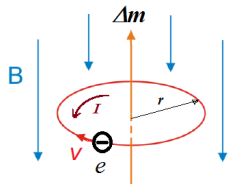
Gęstość energii pola magnetycznego

Gęstość objętościowa energii pola magnetycznego [J/m^3=Pa]:

$$w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

Siły mechaniczne w polu magnetycznym

Diamagnetyk w zewnętrznym polu magnetycznym



Atomy **diamagnetyków** przy braku zewnętrznego pola magnetycznego wzajemnie kompensują momenty magnetyczne od poruszających się po orbitach (w przeciwnych kierunkach) par elektronów.

W zewnętrznym polu magnetycznym następuje wzmocnienie momentu magnetycznego elektronu, którego pole jest skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego (reguła Lenza).

Atomy diamagnetyka w zewnętrznym polu magnetycznym ***B*** stają się dipolami o momencie magnetycznym:

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{e^2 r^2}{4 m_e}\mathbf{B}$$

e – ładunek elektronu, m_e – jego masa, *r* – promień orbity

Dipole magnetyczne ustawiają się tak, aby wektor momentu magnetycznego $\Delta \boldsymbol{m}$ był skierowany przeciwnie do indukcji ***B***.

Aby wyznaczyć wartości i kierunki sił działających na diamagnetyk, można skorzystać z metod:

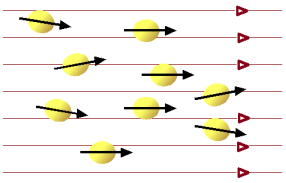
- opartej na rozkładzie wektora gęstości sił wewnątrz obiektu,
- opartej na rozkładzie tensora naprężeń powierzchniowej na jego powierzchni zewnętrznej.

Paramagnetyk w zewnętrznym polu magnetycznym

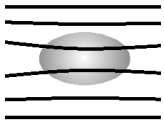
Atomy **paramagnetyków** charakteryzują się trwałym momentem magnetycznym.

Pole magnetyczne zewnętrzne spowoduje:

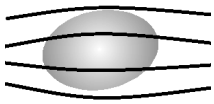
- Wywarcie sił mechanicznych na dipole, powodujących ich obrócenie w pozycji minimalizującej energię potencjalną układu dipol pole zewnętrzne, tj. ustawienia dipoli wzdłuż linii pola zewnętrznego i zgodnie z jego kierunkiem.
- Zaindukowane momenty magnetyczne skierowane przeciwnie do wektora indukcji (jak w diamagnetyku) częściowo kompensują momenty dipolowe, ale zjawisko to nie jest dominujące u paramagnetyków.



Rozkład linii pola magnetycznego



Parmagnetyk
- wzmocnienie pola wewnątrz obiektu



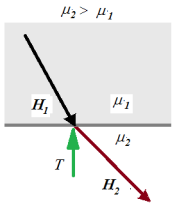
Diamagnetyk
- osłabienie pola wewnątrz obiektu i wzmocnienie na zewnątrz

Siły rozwarstwiające magnetyki

Na powierzchni styku różnych magnetyków pojawiają się naprężenia powierzchniowe, których składowa normalna powoduje ich rozwarstwienie. Naprężenie mechaniczne na styku dwóch magnetyków:

$$T = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2}\left(\mu_1 H_{n1}^2 + \mu_2 H_{t1}^2\right)$$

- **Siła wypadkowa skierowana jest od środowiska o większej przenikalności magnetycznej do mniejszej. Kierunek siły nie zależy od kierunku pola.**
- **Siły rozwarstwiające powodują brzęczenie źle spakietowanych blach magnetowodów (zanieczyszczenia warstw między cienkimi blachami) poddanych działaniu pola magnetycznego.**

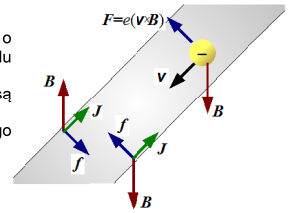


Siły mechaniczne pomiędzy przewodami linii przesyłającej energię elektryczną

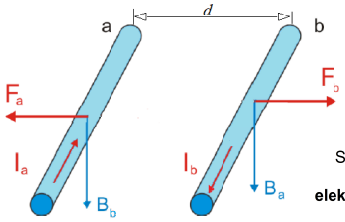
Samościsk

- oddziaływanie pola na prąd, który je wytworzył

- Przewód prostoliniowy przez który płynie prąd o gęstości ***J***. Pole magnetyczne od tego prądu oddziaływuje na przewód siłą o gęstości ***f=JxB***
- Siły działające na powierzchni przewodu skierowane są do jego środka.
- Dzięki tym siłom następuje ściskanie kanału prądowego i niedopuszczenie do ucieczki nośników z kanału.



Linia dwuprzewodowa



Siły mechaniczne wzajemnego oddziaływania między przewodami

$$\mathbf{F}_b = I_b(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_a)$$

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}$$

Siły te uzyskują znaczne wartości w przypadku przepływu np. prądów zwarciowych – **siły elektrodynamiczne** (dynamiczne oddziaływanie na więzy mechaniczne)

Teoria pola w MATEMATYCE

Pole przypisuje każdemu punktowi przestrzeni ***r***$=(x_1,x_2,...,x_N)$ wartość liczbową:

- dokładnie jedną – pole **skalarne**
- wiele (wektor) – pole **wektorowe**

Każdemu polu skalarnemu możemy przyporządkować skojarzone z nim pole wektorowe

Pochodna cząstkowa

Pochodna funkcji względem x_i przy założeniu, że pozostałe zmienne traktujemy jako stałe i tak też się ją liczy, przy czym wszystkie definicje i wnioski są prawdziwe także dla pochodnych wyższego rzędu.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2.., x_i + \Delta x_i, .x_n) - f(x_1, x_2.., x_i, .x_n)}{\Delta x_i}$$

Gradient

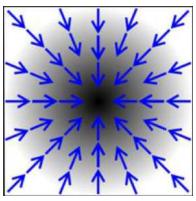
Gradient jest swego rodzaju odpowiednikiem zwykłych pochodnych dla funkcji wielu zmiennych. Podobnie jak pochodna, gradient opisuje tangens kąta nachylenia wykresu funkcji w danym punkcie. Jeśli *f(x)* jest różniczkowalną funkcją *n* – zmiennych, gradient to wektor *n* pochodnych cząstkowych tej funkcji. Wektor ten wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu:

$$grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Np. w przestrzeni 3D:

$$grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Gdzie: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - jednostkowe wektory bazowe przestrzeni



Rys. Wizualizacja funkcji określonej kolorem – im kolor ciemniejszy, tym większa wartość funkcji. Strzałki odpowiadają gradientowi tej funkcji.

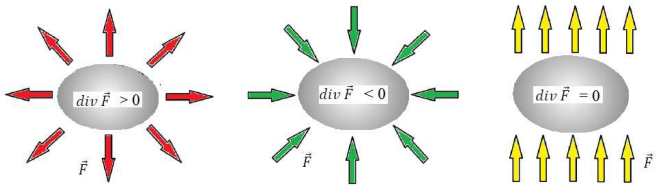
Dywergencja

Dywergencja jest to operator, będący miarą natężenia źródła lub ujścia pola wektorowego na jednostkę objętości. Rezultat działania takiego operatora na funkcję wektorową jest skalarem.

Np.: wyobraźmy sobie nieskończenie małą objętość, przez której powierzchnię przechodzi strumień substancji (będący wektorem). Jeśli substancja *ucieka* z objętości, to znak dywergencji będzie dodatni, natomiast jeśli masa *napływa* do objętości - ujemny. Wartość dywergencji mówi jak intensywny jest ten wypływ/przypływ substancji.

Dla różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ dywergencja równa jest funkcji skalarnej:

$$div\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



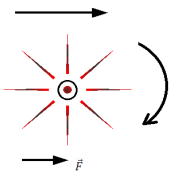
Rotacja

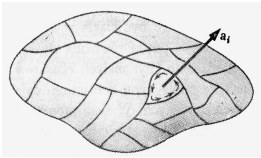
Rotacja jest operatorem opisującym nieskończenie małe *wirowanie* wielowymiarowego pola wektorowego. W każdym punkcie przestrzeni pole rotacji opisywane jest przez wektor, którego kierunek i długość opisują wirowość pola w danym punkcie.

W przestrzeni 3D:

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Bezwirowość pola jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym jego potencjalności





Laplasjan

Operator Laplace'a jest operatorem różniczkowym opisującym dywergencję z gradientu pola. Laplasjan pola skalarnego f(p0), gdzie p0=(x0, y0, z0), to miara różnicy średniej wartości pola w nieskończenie małym otoczeniu tego punktu i wartości pola w tym punkcie.

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = div\, grad\, f$$

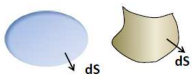
Np. w przestrzeni 3D:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Strumień

Rodzaje powierzchni:
1. zamknięta S(V) – jest powierzchnią zewnętrzną objętości V
2. otwarta S(*l*) – jest powierzchnią o krzywej brzegowej l

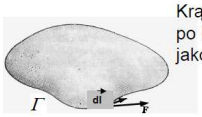


Krzywizna powierzchni jest określona w każdym jej punkcie wektorem $d\mathbf{S} = \mathbf{u}_n\, dS$. o jednostkowej długości i skierowanym normalnie zewnętrznie (dla S(V))

Strumień wektora ***F*** przez powierzchnię S:

$$\Phi = \int_S \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{S}}$$

Cyrkulacja



Krążenie (cyrkulacja) pola wektorowego $\vec{\mathbf{F}}$ po konturze zamkniętym jest zdefiniowane jako całka krzywoliniowa:

$$C = \oint_\Gamma \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{l}}$$

$d\vec{\mathbf{l}}$ element drogi całkowania ma kierunek styczny do krzywej Γ w danym punkcie

Jeżeli $\vec{\mathbf{F}}$ jest siłą, to krążenie ma sens fizyczny pracy.

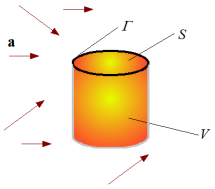
Jeżeli $\vec{\mathbf{F}}$ jest siłą zachowawczą (pole elektrostatyczne, grawitacyjne), to $C = 0$.

Krzywa Γ ogranicza pewną powierzchnię zamkniętą rozpiętą na tej krzywej.

Podsumowanie

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\Phi_{\mathbf{a}}}{V} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_V \mathbf{a}\, d\mathbf{S}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{S\to 0} \frac{C_{\mathbf{a}}}{S} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_\Gamma \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$$



Tw. Stokesa $\oint_\Gamma \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$

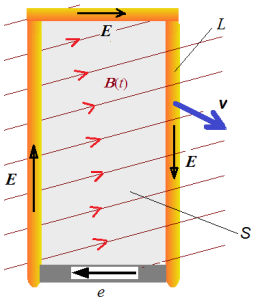
Tw. Ostrogradskiego-Gausa $\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV$

Fakty: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0$

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$

operator	symbol	działanie	działa na:	daje w rezultacie:
gradient	∇	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$	pole skalarne	pole wektorowe
dywergencja	$\nabla\cdot$	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole wektorowe	pole skalarne
rotacja	$\nabla\times$	$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$	pole wektorowe	pole wektorowe
laplasjan	Δ	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole skalarne	pole skalarne

Indukcja elektromagnetyczna



Zał: prędkość ***v*** jest stała

Gdy ***v=0*** to z pr. Faradaya: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

Gdy ***v*** ≠ *0* to *e* = ?

Strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię *S* rozpiętą na konturze *L* (ograniczonym przewodem):

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_S \mathbf{B}(t)\, d\mathbf{S}$$

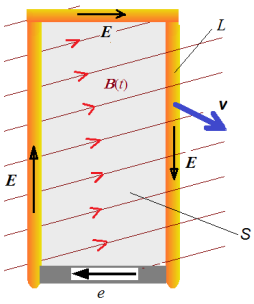
Jego pochodna zupełna:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\Phi$$



$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\Phi$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\Phi = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\int_S \mathbf{B}(t)\, d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}(t)\, d\mathbf{S}$$

Ponieważ:
- div ***v*** =0 (prędkość stała)
- div ***B*** =0 (nie ma wydzielonych biegunów magnetycznych – pr. Gausa)

to można pokazać, że:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B} = -\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

i korzystając z tw. Stokesa mamy:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\Phi = \oint_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{l}$$

Zatem ostatecznie, siła elektromotoryczna indukowana w przesuwającym się przewodzie:

$$e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{l}$$

Składowa transformacji:

$$e_t = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Składowa rotacji:

$$e_r = \oint_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{l}$$

Składowa transformacji SEM:

$$e_t = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

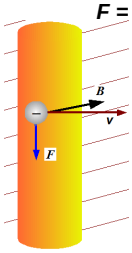
- Zmienne w funkcji czasu pole magnetyczne indukuje (zmienne) pole elektryczne – pr. Faradaya
- Zaindukowane pole elektryczne pojawia się w każdym punkcie przestrzeni (w którym dokonuje się zmiana pola magnetycznego), nawet w próżni

Składowa rotacji SEM:

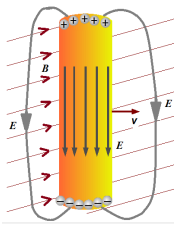
$$e_r = \oint_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{l}$$

- Związana jest z obiektem materialnym (posiadającym ładunki elektryczne), przemieszczającym się względem (stałego lub zmiennego) pola magnetycznego.
- Nie indukuje się w próżni.
- Wiąże się z wywieraniem siły Lorentza na ładunki swobodne, które będą przemieszczać się ku powierzchnio obiektu:

F = *e* (***v*** x ***B***)



Skutek:

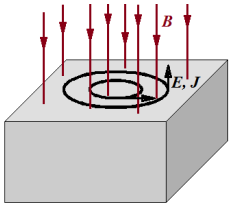


Po zwarciu końcówek obiektu przewodem, popłynie w nim prąd.

Prądy wirowe

- Jeżeli zmienne w funkcji czasu pole magnetyczne wnika do środowiska przewodzącego, indukuje się SEM.
- Wzdłuż zamkniętego konturu indukuje się pole elektryczne.
- Zaindukowane pole elektryczne wymusza ruch ładunków swobodnych, czyli przepływ **prądów wirowych** o gęstości ***J***.

Prądy wirowe wymuszone są przez składową transformacji SEM.



Zastosowanie: w obiektach grzanych indukcyjnie

Prądy wirowe są źródłem własnego pola magnetycznego, skierowanego tak, aby przeciwdziałać zmianom magnetycznego pola zewnętrznego. Prądy wirowe osłabiają więc zewnętrzne pole magnetyczne.

Aby przeciwdziałać indukowaniu się prądów wirowych w magnetowodach (straty energii), rdzenie magnetyczne wykonywane są z pakietów cienkich blach - izolowane powierzchnie styku blach prostopadle do wektora indukcji.

Równania pola e-m (Maxwella)

I równanie Maxwella:
zmienny w czasie strumień magnetyczny jest źródłem wirowego pola elektrycznego
(prawo Faradaya):

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad \text{lub:} \quad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

II równanie Maxwella:
pole magnetyczne jest polem wirowym, a źródłem tego pola są prądy: przewodzenia oraz przesunięcia.
(rozszerzone prawo Ampere'a):

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \quad \text{lub:} \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

III równanie Maxwella:
źródłem pola elektrycznego potencjalnego są ładunki elektryczne, a linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą się na ładunkach elektrycznych.
(prawo Coulomba, prawo Gaussa dla elektryczności):

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\cdot dV \quad \text{lub:} \quad div\vec{D} = \rho$$

IV równanie Maxwella:
nie istnieją "ładunki" magnetyczne, a linie pola magnetycznego są liniami zamkniętymi
(prawo Gaussa dla magnetyzmu):

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{lub:} \quad div\vec{B} = 0$$

Równania pola e-m (Maxwella)

Całkowa postać równań Maxwella	Różniczkowa postać równań Maxwella	
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] \equiv rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right)\cdot d\vec{S}$	$\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] \equiv rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$	$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$
$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\cdot dV$	$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) \equiv div\vec{D} = \rho$	$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) \equiv div\vec{B} = 0$	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

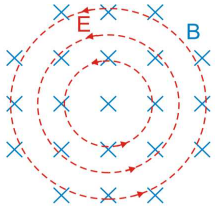
W teorii Maxwella elektryczne i magnetyczne właściwości izotropowego środowiska są określane wielkościami:

- *przenikalnością dielektryczną* ε $\quad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\cdot\vec{E}$
- *przenikalnością magnetyczną* μ $\quad \vec{B} = \mu_0\mu\cdot\vec{H}$
- *przewodnością elektryczną właściwą* ρ $\quad \vec{j} = \sigma\cdot\vec{E}$

$\varepsilon_0 \approx 8{,}9\cdot 10^{-12}\, C^2/(N\cdot m^2)$, $\mu_0 \approx 1{,}3\cdot 10^{-6}\, H/m$

Relacja: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{8{,}9\cdot 1.3}}\cdot 10^9 \approx 3\cdot 10^8 \quad m/s$

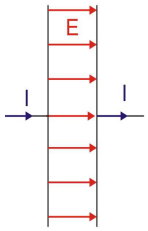
Indukcja magnetomotoryczna i prąd przesunięcia

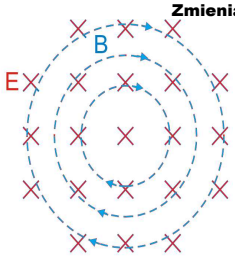


Zmieniające się pole magnetyczne indukuje pole elektryczne
prawo Faradaya (I równanie Maxwella):

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Jeżeli strumień Φ_B wzrasta, linie ***E*** skierowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, stąd „ – ".

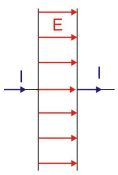


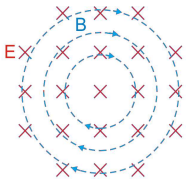


Zmieniające się pole elektryczne indukuje pole magnetyczne
analogicznie do *prawa Faradaya:*

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Jeżeli strumień Φ_E wzrasta, linie ***B*** skierowane są zgodnie z ruchem wskazówek zegara, stąd „ + ".





Relacja między pole magnetycznym a elektrycznym w przestrzeni (np. między okładkami kondensatora):

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Zgodnie z pr. Ampere'a pole magnetyczne może wytworzyć prąd w (zamkniętym) przewodniku (i na odwrót):

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

Zatem, ogólnie pole magnetyczne może być wytwarzane przez:

- zmienne pole elektryczne
- przepływ prądu elektrycznego **(prądu przewodzenia)**

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0\left(\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + i\right) \quad \text{(II równanie Maxwella)}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

Prąd przesunięcia (gęstość prądu przesunięcia) – miara szybkości zmian pola elektrycznego „przepływa" między okładkami kondensatora

Jeżeli pole elektryczne jest sinusoidalnie zmienne w funkcji czasu **(pole harmoniczne)**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\sin(\omega t + \Psi)$$

to można pokazać, że stosunek modułu wektora prądu przewodzenia do modułu wektora prądu przesunięcia:

$$\frac{j}{j_\varepsilon} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon} = \mathrm{tg}\,\delta$$

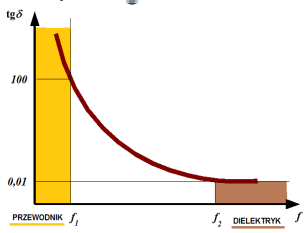
Tangens **kąta stratności** – wskaźnik klasyfikacji środowisk poddanych działaniu pola harmonicznego.

Gdy:

- tg δ >100 – środowisko jest „idealnym" przewodnikiem
- tg δ < 0,01 – środowisko jest „idealnym" dielektrykiem

tg δ **zależy od częstotliwości pola !**

	σ	ε	Przewodnik	Dielektryk
	S/m	F/m	Hz	Hz
Woda morska	4	$7{,}1\cdot 10^{-10}$	$< 9\cdot 10^{6}$	$> 9\cdot 10^{10}$
Woda słodka	10^{-3}	$7{,}1\cdot 10^{-10}$	< 2200	$> 2{,}2\cdot 10^{7}$
Grunt suchy	10^{-5}	$0{,}45\cdot 10^{-10}$	< 360	$> 3{,}6\cdot 10^{6}$
Grunt mokry	10^{-3}	$0{,}9\cdot 10^{-10}$	$< 1{,}8\cdot 10^{4}$	$> 1{,}8\cdot 10^{8}$
Srebro	$6{,}2\cdot 10^{7}$	$8{,}85\cdot 10^{-12}$	$< 1{,}1\cdot 10^{20}$	-



Równania falowe

Na podstawie *równań Maxwella* można wyprowadzić równania różniczkowe 2-go rzędu, opisujące pole e-m, które są ograniczone do określenia zmienności wektorów natężeń pól.

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\rho}{\varepsilon}$$

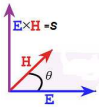
Gęstość objętościowa ładunków elektrycznych w środowisku.

Wektor Poyntinga

Strumień mocy przenikający przez powierzchnię, otaczającą dany obiekt [W/m^2]

- miara przemieszczania się energii przez powierzchnię **(gęstość powierzchniowa mocy)**:

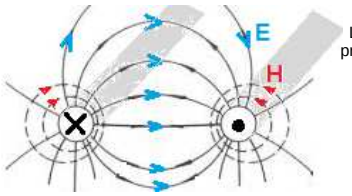
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$



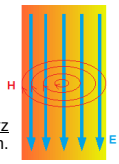
- Jeżeli strumień tego wektora przez powierzchnię zamkniętą jest dodatni, to energia wypływa z tego obszaru.
- Jeżeli strumień tego wektora przez powierzchnię zamkniętą jest ujemny, to energia wnika z otoczenia do tego obszaru.
- Wektor Poyntinga wskazuje kierunek przemieszczania się energii pola e-m.
- **Warunkiem przemieszczania się energii poza obszar jej wytwarzania jest jednoczesne istnienie pola elektrycznego oraz magnetycznego.**

$$\mathbf{S} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \neq 0 \wedge \mathbf{H} \neq 0$$

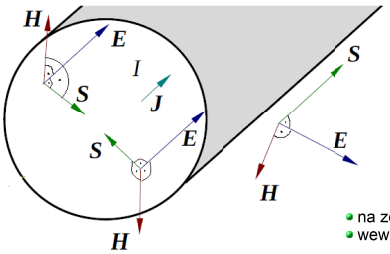
Funkcje przewodnika i dielektryka przy przesyle energii elektrycznej



Linie pola e-m wokół przewodów z prądem.



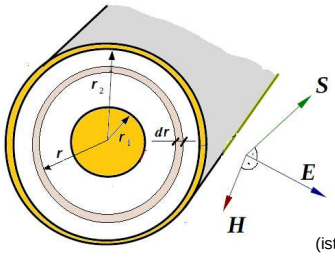
Linie pola e-m wewnątrz przewodu z prądem.



- Linie pola magnetycznego – koncentrycznie wokół osi przewodu (wewnątrz i na zewnątrz)
- Linie pola elektrycznego:
  - wewnątrz – wzdłuż osi
  - na zewnątrz – prostopadle do osi

Wektor Poyntinga:

- na zewnątrz – równolegle do przewodu;
- wewnątrz – prostopadle do wnętrza przewodu.



Kabel koncentryczny

- analiza w przestrzeni dielektrycznej

Jeżeli żyłami kabla płynie prąd stały *I*, wymuszony napięciem *U*, to natężenie pola elektrycznego (składowa normalna ***E***):

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Natężenie pola magnetycznego (istnieje tylko składowa normalna ***H***): $H = \frac{I}{2\pi r}$

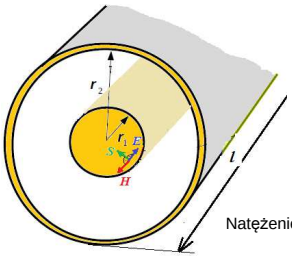
Wektor Poyntinga: $S = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$

Elementarny strumień wektora ***S*** przenikający do dielektryka przez cienki pierścień o promieniu *r* i grubości *dr*: $S 2\pi r \mathrm{d}r$

Całkowity strumień wektora ***S*** wnikający do dielektryka: $\int_{r1}^{r2} S 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{UI}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r1}^{r2} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = UI$

zaś *UI*=*P* – moc czynna dostarczana do odbiornika !

Wniosek: **Energia elektryczna jest przesyłana przez dielektryk (nie przez część przewodzącą) !**



Kabel koncentryczny

- analiza elementu przewodzącego

Jeżeli żyłami kabla płynie prąd stały *I*, wymuszony napięciem *U*, to natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni żyły (składowa styczna ***E***):

$$E = \frac{I}{2\pi r_1 \sigma}$$

Natężenie pola magnetycznego przy powierzchni (istnieje tylko składowa normalna ***H***): $H = \frac{I}{2\pi r_1}$

Wektor Poyntinga: $S = \frac{I^2}{2\pi^2 r_1^3 \sigma}$

Całkowity strumień wektora ***S*** wnikający do żyły o długości *l*: $S 2\pi r_1 l = \frac{l I^2}{\pi r_1^2 \sigma} = R I^2$

gdzie opór żyły (rezystancja): $R = \frac{l}{\pi r_1^2 \sigma}$

zaś $RI^2 = \Delta P$ – moc wydzielonego w przewodzie ciepła (straty na przesyle)!

Wniosek: **Energia elektryczna, która wnika do przewodnika jest zamieniana na ciepło i nie dociera do odbiornika (jest tracona) !**

Funkcje przewodnika i dielektryka przy przesyle energii elektrycznej - podsumowanie

- **Prąd płynie przez przewodnik (żyłę kabla).**
- **Energia elektryczna nie jest przesyłana przez przewodnik, tylko poprzez przestrzeń nieprzewodzącą (dielektrykiem – nie żyłę kabla).**
- **Energia elektryczna, która wnika do elementu przewodzącego jest nieodwracalnie przemieniana na ciepło, wydzielające się na elemencie (żyle) – nie dociera do odbiornika (jest tracona).**

????????????????

Przewodnik służy do nadania kierunku przesyłowi energii elektrycznej (koncentracja i ukierunkowanie przesyłu)

Siły mechaniczne w polu elektromagnetycznym

- Obliczanie sił mechanicznych wywieranych przez pole e-m na obiekty materialne, ładunki i prądy sprowadza się do analizy **naprężeń powierzchniowych** lub **rozkładów gęstości sił objętościowych**.
- Naprężenia (tensor naprężeń) od pola e-m jest równy sumie naprężeń od składowej elektrycznej i magnetycznej pola.
- **Gęstość objętościowa pędu pola e-m** powodowana przemieszczaniem się energii (ze skończoną prędkością) ma **kierunek wektora Poyntinga**,

Pytania

1. **Od czego zależy naprężenie mechaniczne powstające na styku dwóch materiałów o różnych przenikalnościach magnetycznych lub elektrycznych?**
2. **Jak rozkładają się siły mechaniczne działające na przewodniki z prądem (jeden przewód – zjawisko samościsku lub 2 równoległe: przewód zaslający i powrotny)?**
3. **SEM transformacji i rotacji – interpretacja i definicja.**
4. **Jak powstają i co to są prądy wirowe?**
5. **Równania Maxwella – interpretacja i odniesienie do innych praw fizycznych.**
6. **Prąd przesunięcia i przewodzenia – definicja i interpretacja.**
7. **Definicja tangensa kąta stratności w harmonicznym polu elektrycznym, czy częstotliwość pola wpływa na elektryczne zdolności przewodzące materiału?**
8. **Wektor Poyntinga – definicja i interpretacja.**
9. **Rola przewodów (przewodnika i dielektryka) przy przesyle energii elektrycznej.**